

Übungen zur Vorlesung Gravimetrie & Magnetik:

Gravimetrie

8. Dezember 2008

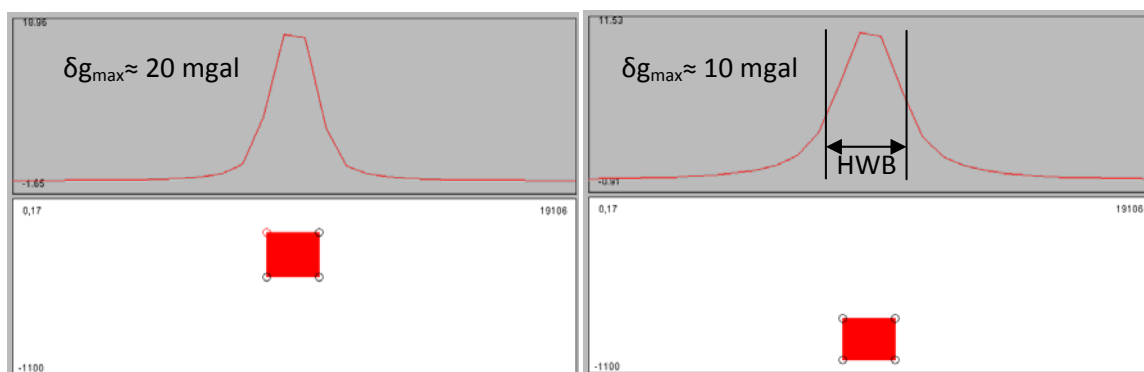
Christian Katlein, Veronika Wahl, Nicklas Ritzmann, Philipp Baier,
Tewje Mehner, Philipp Polzin, Alexander Bornikoel

1. Modellrechnung

Mithilfe einer Software zur Modellierung von Schwereanomalien zweidimensionaler Störkörper wurden verschiedene Anomalien und Störkörper untersucht.

1a) Modellierung verschiedener Störkörper

Zunächst wurde ein einfacher quadratischer Störkörper in zwei verschiedenen Tiefenlagen untersucht:

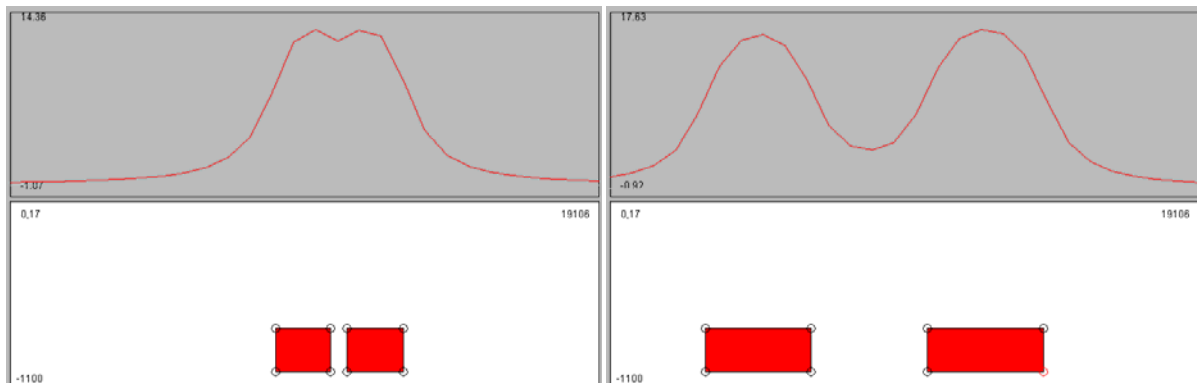


Die Anomalie befindet sich jeweils genau über dem Störkörper. Die Stellen maximaler Steigung, der Anomaliekurve ($\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 0$) decken sich in etwa mit der Störkörperberandung. Aus der Anomalie lässt sich also ein grober Schluss auf die Ausdehnung des Störkörpers ziehen.

Hierbei ist gut zu erkennen, dass der tieferliegende Körper eine deutlich geringere Anomalie hervorruft, dafür ist die Breite der Anomalie aber deutlich größer. Die Breite ist also ein grobes Maß für die Tiefe des Störkörpers. Für zweidimensionale Störkörper gilt, dass die maximale Tiefe durch die halbe Halbwertsbreite der Anomalie gegeben ist. Wenn die Form des Störkörpers unbekannt ist, lässt sich zwar nicht die Tiefe bestimmen, aber zumindest eine Maximaltiefe angeben.

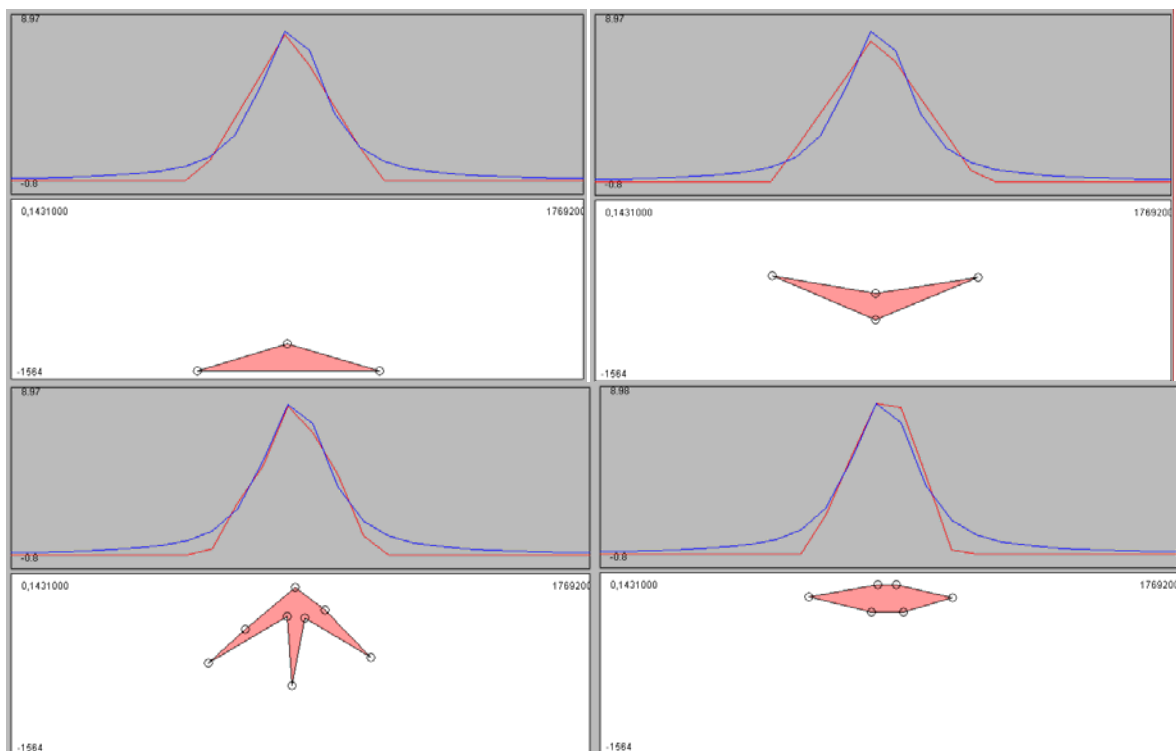
Bei zu tief liegenden Störkörpern wird der Betrag der Anomalie sehr gering. Gegebenenfalls kann dabei die Nachweisgrenze des Gravimeters (ca. 0,01 mgal) unterschritten und somit eine Erfassung des Störkörpers unmöglich werden.

Um die Möglichkeit der Auflösung von zwei verschiedenen benachbarten Störkörpern zu verdeutlichen, wurde die Anomalie von zwei unterschiedlich weit voneinander entfernten Rechtecken modelliert:



Hierbei ist klar zu erkennen, dass zwei zu dicht aneinander liegende Störkörper unter Umständen in der gemessenen Anomalie nicht als zwei verschiedene zu erkennen sind.

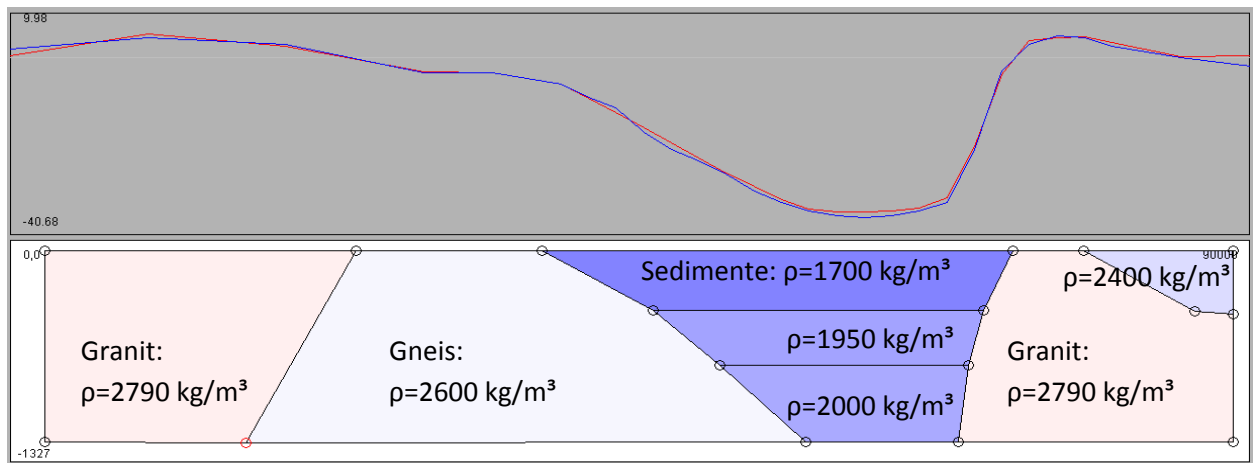
Betrachtet man unterschiedliche Störkörperformen, so wird deutlich, dass aufgrund der Vieldeutigkeit wie sie jeder Potentialmethode innewohnt, viele verschiedene Störkörper exakt die gleiche Anomalie hervorrufen können:



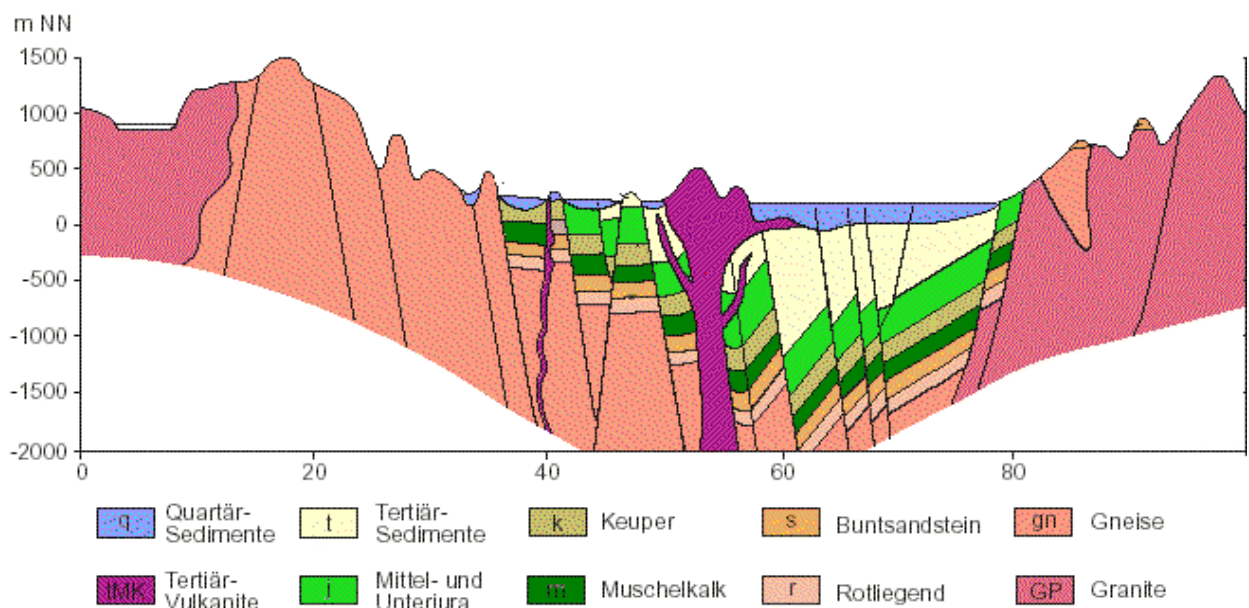
1b) Modellierung des Rheingrabens

Die gegebenen Messdaten wurden in die Software zur Modellierung von 2-D Schwereanomalien importiert und ein geologisch möglichst sinnvolles Modell erstellt (Länge 90km, Tiefe ca. 1,3 km), bei dem die berechnete Schwereanomalie an die importierten Daten angepasst wurde:

- **Rote** Kurve: Aus dem Modell berechnete Anomalie [mgal]
- **Blaue** Kurve: Gemessene Anomalie [mgal]



Dies deckt sich in etwa mit dem bekannten geologischen Profil des Rheingrabens:



(Bild-Quelle: Breisach-Touristik, www.kaiserstuhl.eu)

2. Nachweisgrenze

Es soll die Nachweisgrenze für einen kugelförmigen Hohlraum in Abhängigkeit von Tiefe (t) und Durchmesser (d) des Hohlraumes angegeben werden. Die Nachweisgrenze der Gravimetrie-Messung direkt über dem Störkörper sei eine realistische Annahme von 0,05 mgal.

Die von einer Kugel erzeugte Schwereanomalie ist gegeben durch:

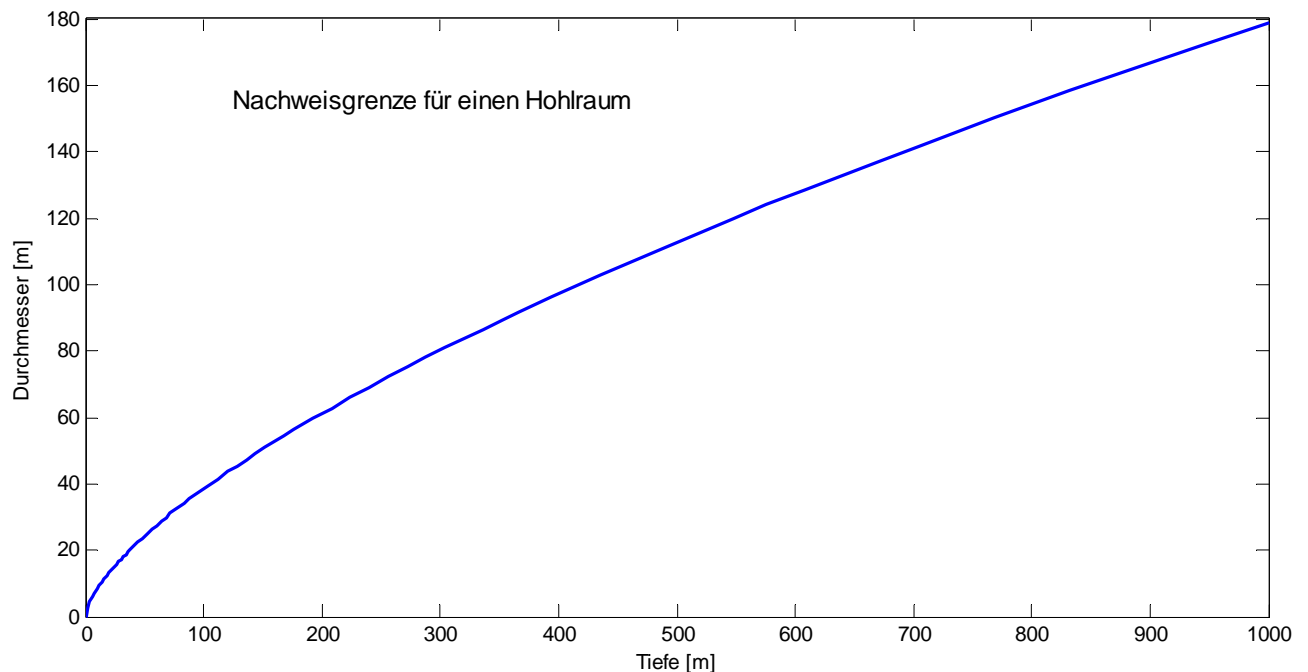
$$\delta g_z = G \cdot \frac{m}{t^2} = G \cdot \frac{1}{t^2} \cdot V \cdot \rho = G \cdot \frac{1}{t^2} \cdot \frac{4}{3} \pi \left(\frac{d}{2}\right)^3 \cdot \rho = \frac{G \cdot \pi \cdot \rho \cdot d^3}{6 \cdot t^2}$$

Um dies in einem t-d-Diagramm darzustellen formen wir um:

$$\begin{aligned} d(t) &= \sqrt[3]{\frac{\delta g_z \cdot 6 \cdot t^2}{G \cdot \pi \cdot \rho}} = \sqrt[3]{\frac{0,05 \text{ mgal} \cdot 6 \cdot t^2}{6,672 \cdot \frac{10^{-11} \text{ m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} \cdot \pi \cdot 2500 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}} = \sqrt[3]{\frac{0,05 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 6 \cdot t^2}{6,672 \cdot \frac{10^{-11}}{\text{s}^2} \cdot \pi \cdot 2500}} \\ &= \sqrt[3]{5,725 \text{ m} \cdot t^2} = 1,79 \cdot t^{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

Die Funktion wurde dann mithilfe der Software MATLAB geplottet:

```
>> fplot('1.79 * x^(2/3)', [0 1000])
```



Hierbei ist auffallend, dass bereits in geringen Tiefen Hohlräume von beachtlicher Größe nicht mehr aufgelöst werden können. Generell eignet sich die Gravimetrie daher eher zum Erfassen großräumiger Strukturen.

3. Vertikaler Schweregradient

Es soll der vertikale Schweregradient in der Mitte eines zylindrischen Turmes (Höhe 20m, Außendurchmesser 10m, Wandstärke 2m, Dichte 2,5 g/cm³) unter vernachlässigung des Erdfeldes berechnet werden.

Für einen infinitesimalen Zylinderring gilt:

$$dg_z = 2\pi \cdot G \cdot \rho \frac{z \cdot r}{(z^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} dr dz$$

Daraus berechnet sich die Schwerebeschleunigung im Turm zu:

$$g_z = \iint dg_z = 2\pi \cdot G \cdot \rho \int_{-h/2}^{h/2} \int_{R_i}^{R_a} \frac{z \cdot r}{(z^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} dr dz$$

$$= 2\pi \cdot G \cdot \rho \int_{-h/2}^{h/2} z \cdot \left[\frac{-1}{(z^2 + r^2)^{\frac{1}{2}}} \right]_{R_i}^{R_a} dz = 2\pi \cdot G \cdot \rho \int_{-h/2}^{h/2} z \cdot \left[\frac{-1}{(z^2 + R_a^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{-1}{(z^2 + R_i^2)^{\frac{1}{2}}} \right] dz$$

Gesucht ist

$$\vec{\nabla} g_z = \frac{\partial g_z}{\partial z} = \frac{dg_z}{dz} = \frac{d}{dz} \int X dz = X$$

Der gesuchte Schweregradient ist also:

$$\vec{\nabla} g_z(z) = 2\pi \rho G \cdot z \cdot \frac{(z^2 + R_a^2)^{\frac{1}{2}} - (z^2 + R_i^2)^{\frac{1}{2}}}{(z^2 + R_a^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (z^2 + R_i^2)^{\frac{1}{2}}} = 2\pi \rho G \cdot z \cdot \frac{\sqrt{(z^2 + R_a^2)} - \sqrt{(z^2 + R_i^2)}}{\sqrt{(z^2 + R_i^2)(z^2 + R_a^2)}}$$

In der Mitte des Turmes sei z=0. Einsetzen der Werte liefert:

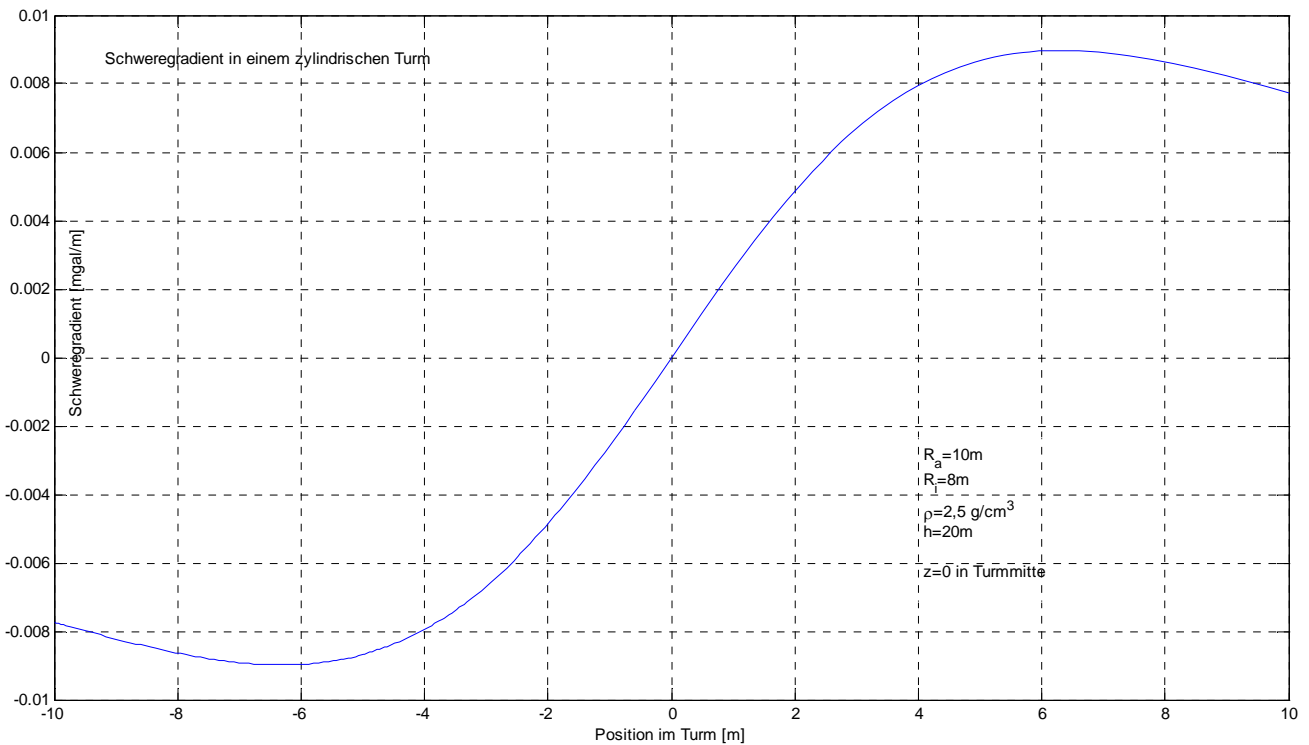
$$\vec{\nabla} g_z(z) = 2\pi \cdot 2500 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 6,672 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} \cdot z \cdot \frac{\sqrt{(z^2 + 10\text{m}^2)} - \sqrt{(z^2 + 8\text{m}^2)}}{\sqrt{(z^2 + 10\text{m}^2)(z^2 + 8\text{m}^2)}}$$

$$\vec{\nabla} g_z(z) = 1,048 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{s}^2} \cdot z \cdot \frac{\sqrt{(z^2 + 100)} - \sqrt{(z^2 + 64)}}{\sqrt{(z^2 + 100)(z^2 + 64)}}$$

$$\vec{\nabla} g_z(z) = 0,1048 \cdot \frac{\text{mgal}}{\text{m}} \cdot z \cdot \frac{\sqrt{(z^2 + 100)} - \sqrt{(z^2 + 64)}}{\sqrt{(z^2 + 100)(z^2 + 64)}}$$

Die Funktion wurde wiederum mithilfe der Software MATLAB geplottet:

```
>> fplot('0.1048*x*(sqrt(x^2+100)-sqrt(x^2+64))/sqrt((x^2+100)*(x^2+64))', [-10 10])
```



4. Gezeiten

Abschließend soll die durch die Sonne verursachte Gezeitenbeschleunigung auf dem Jupiter und dem Merkur berechnet werden:

Die durch die Sonne verursachte Gezeitenbeschleunigung auf einem Planeten ist gegeben durch:

$$a_{gez} = \frac{2 \cdot G \cdot M_{Sonne} \cdot r_{Planet}}{d^3} = G \cdot \frac{M_{Sonne} \cdot D_{Planet}}{d^3}$$

Hieraus ergibt sich für Jupiter:

$$a_{gez} = 6.672 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2} \cdot \frac{2 \cdot 10^{30} kg \cdot 143200 km}{(778 \cdot 10^9 m)^3} = 4,05 \cdot 10^{-8} \frac{m}{s^2} = 0,004 mgal$$

und für Merkur:

$$a_{gez} = 6.672 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2} \cdot \frac{2 \cdot 10^{30} kg \cdot 4880 km}{(58 \cdot 10^9 m)^3} = 3,34 \cdot 10^{-6} \frac{m}{s^2} = 0,34 mgal$$

Der Merkur ist also deutlich stärkeren Gezeitenkräften ausgesetzt, als der Jupiter.