

## Übungen Seismik I:

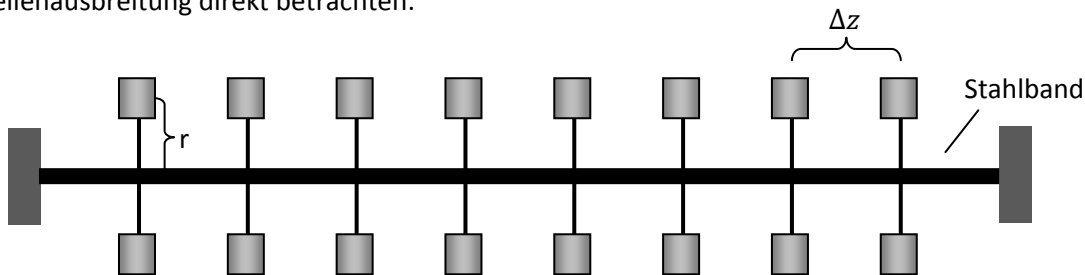
# Wellen

3.&amp;6. November 2008

 Christian Katlein, Niclas Ritzmann, Philipp Polzin, Philipp Baier,  
 Alexander Bornikoel, Tewje Mehner, Veronika Wahl

## 1. Torsionswellenkette

Die Torsionswellenkette ist ein oft verwendetes Modell zur Veranschaulichung der Wellenausbreitung. Sie besteht aus zahlreichen hantelförmigen Torsionsschwingern, die über ein steifes Stahlband gekoppelt sind. An ihr lassen sich die wesentlichen Grundlagen der Wellenausbreitung direkt betrachten.



Für die Torsionswellenkette ergibt sich folgende Wellengleichung:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{D \cdot \Delta z^2}{\Theta} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$$

Mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit

$$c = \Delta z \cdot \sqrt{\frac{D}{\Theta}}$$

### 1a) Messung der Schwingungsdauer des Torsionsschwingers.

Zur Bestimmung der Federeigenschaften wurde an einem einzelnen Schwinger mehrfach die Schwingungsdauer für verschiedene Werte von  $r$  gemessen.

Aus der Schwingungsdauer lässt sich der Quotient  $\frac{D}{\Theta}$  berechnen, der für die weiteren Berechnungen nötig ist. Er lässt sich nicht direkt bestimmen, da  $D$  unbekannt ist und  $\Theta$  nur aus dem genauen Aufbau der Hantel durch längere Rechnung bestimmt werden kann. Es gilt:

$$\frac{D}{\Theta} = \frac{2\pi^2}{T^2}$$

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Torsionswelle ist dann gegeben durch:

$$v_{Torsion} = \Delta z \cdot \sqrt{\frac{D}{\Theta}}$$

Es wurde je zehn mal die Periodendauer für drei verschiedene Werte von r gemessen:

T in s	3*T	3*T	3*T	3*T	3*T	3*T	3*T	3*T	3*T	3*T	3*T	Ø 3*T	Ø T	σ
r1=38 cm	3,28	3,31	3,15	3,28	3,22	3,16	3,25	3,16	3,22	3,18		3,221	1,07	0,02
r2=25 cm	2,06	2,12	2,13	2,19	2,18	2,13	2,22	2,16	2,16	2,16		2,151	0,72	0,01
r3=10 cm	1,31	1,35	1,22	1,34	1,35	1,37	1,47	1,31	1,31	1,33		1,336	0,45	0,02

Mit

$$v_{Torsion} = \Delta z \cdot \sqrt{\frac{2\pi^2}{T^2}} \quad \text{und} \quad \Delta z = 0,065m$$

lassen sich die Ausbreitungsgeschwindigkeiten berechnen zu:

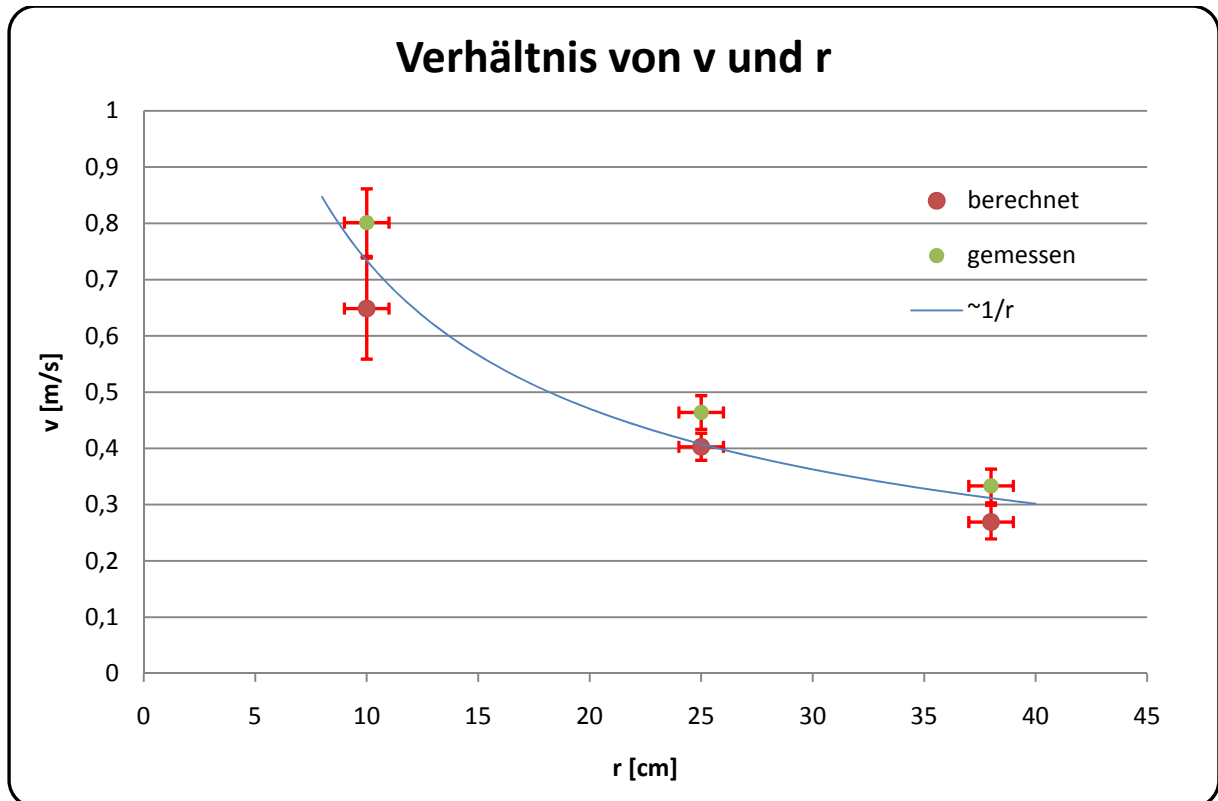
v [m/s]	v	σ
r1=38 cm	0,26	0,01
r2=25 cm	0,40	0,01
r3=10 cm	0,64	0,03

### **1b) Direkte Messung der Ausbreitungsgeschwindigkeit**

Nun wurde die Ausbreitungsgeschwindigkeit direkt gemessen. Hierzu wurde der erste Schwinger ausgelenkt und die Zeit gemessen in der sich die Störung bei verschiedenen Werten von r bis zum Ende der Torsionswellenkette fortgepflanzt hat.

Laufzeit [s]	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	Ø t	σ
r1=38 cm	5,87	5,63	6	5,84	6,03	6,31	5,93	6,09	6,16	6,22	6,008	0,2
r2=25 cm	4,35	4,16	4,47	4,28	4,4	4,28	4,35	4,34	4,35	4,16	4,314	0,1
r3=10 cm	2,44	2,47	2,6	2,5	2,5	2,41	2,66	2,46	2,47	2,47	2,498	0,08
v [m/s]	v	v	v	v	v	v	v	v	v	v	Ø v	σ
r1=38 cm	0,341	0,355	0,333	0,342	0,332	0,317	0,337	0,328	0,325	0,322	0,333	0,01
r2=25 cm	0,46	0,481	0,447	0,467	0,455	0,467	0,46	0,461	0,46	0,481	0,464	0,01
r3=10 cm	0,82	0,81	0,769	0,8	0,8	0,83	0,752	0,813	0,81	0,81	0,801	0,02

Die direkt gemessenen und die berechneten Werte für die Ausbreitungsgeschwindigkeit wurden nun in ein gemeinsames Diagramm eingezeichnet. Im Rahmen der Messgenauigkeit (3σ) passen gemessene und berechnete Werte zusammen.



Zwischen  $v$  und  $r$  besteht ein Zusammenhang der Form:

$$v(r) = \Delta z \cdot \sqrt{\frac{D}{\Theta}} \cong \sqrt{\frac{\Delta z^2 \cdot D}{2 \cdot m \cdot r^2}} \sim \sqrt{\frac{\text{const}}{r^2}} \sim \frac{\text{const}}{r}$$

Hierbei wurde  $\Theta$  als  $2mr^2$  vereinfacht, was jedoch keine sehr große Abweichung von der Realität darstellt, da die Ausdehnung der Massen klein gegenüber  $r$  ist.

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit ist also proportional zu  $\frac{1}{r}$ .

#### **1d) Berechnung der Reflexions- und Transmissionskoeffizienten**

An einer Grenzschicht von zwei Materialien (hier zwei verschiedene Werte von  $r$ ) gibt es Reflexion an und Transmission durch die Grenzschicht hindurch. Der Wellenwiderstand der Torsionswellenkette ist gegeben durch:

$$Z_r = \sqrt{D \cdot \Theta} \approx \sqrt{D \cdot 2mr^2} = r \cdot \alpha$$

Bzw. es gilt:

$$v = \Delta z \sqrt{\frac{D}{\Theta}} \rightarrow v^2 = \Delta z^2 \frac{D}{\Theta} \rightarrow \Theta = \frac{D \cdot \Delta z^2}{v^2}$$

Und damit:

$$Z_v = \sqrt{D \cdot \Theta} = \sqrt{\frac{D^2 \cdot \Delta z^2}{v^2}} = \frac{D \cdot \Delta z}{v} = \frac{\beta}{v} \sim \left(\frac{1}{v}\right)$$

Der Reflexionskoeffizient ist damit gegeben durch:

$$R \approx \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} = \frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1} \quad \text{bzw.} \quad R = \frac{\left(\frac{1}{v}\right)_2 - \left(\frac{1}{v}\right)_1}{\left(\frac{1}{v}\right)_2 + \left(\frac{1}{v}\right)_1}$$

Der Transmissionskoeffizient ist damit gegeben durch:

$$T \approx \frac{2 \cdot Z_2}{Z_2 + Z_1} = \frac{2 \cdot r_2}{r_2 + r_1} \quad \text{bzw.} \quad T = \frac{2 \cdot \left(\frac{1}{v}\right)_2}{\left(\frac{1}{v}\right)_2 + \left(\frac{1}{v}\right)_1}$$

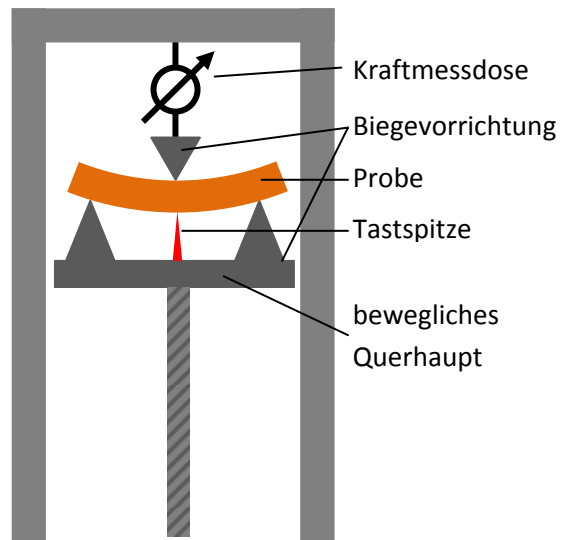
Am Ende der Wellenkette ist der Transmissionskoeffizient gleich null und bei Vernachlässigung der Dämpfung der Reflexionskoeffizient gleich eins.

## 2. Bestimmung der Ausdehnungsgeschwindigkeiten einer Stab-Dehnungswelle

### 2a) Bestimmung des E-Modul mittels Biegeversuch:

#### Versuchsaufbau:

Der E-Modul wird durch Biegeversuch in einer Universalprüfmaschine bestimmt. Hierzu wird die Aluminium- bzw. PVC-Probe (Querschnitt 1,0 x 1,0 cm) in eine Dreipunkt-Biegevorrichtung gebracht und auf Druck belastet. Hierbei wird jeweils die Position des Querhaupts (Quertraverse), die gemessene Kraft sowie die direkte Durchbiegung der Probe mittels einer Tastspitze festgehalten. Das Querhaupt wird mit einer Geschwindigkeit von 0,5 mm/min bewegt.



Messwerte: (1. Gruppe am 3.11.2008)

#### **Aluminium:**

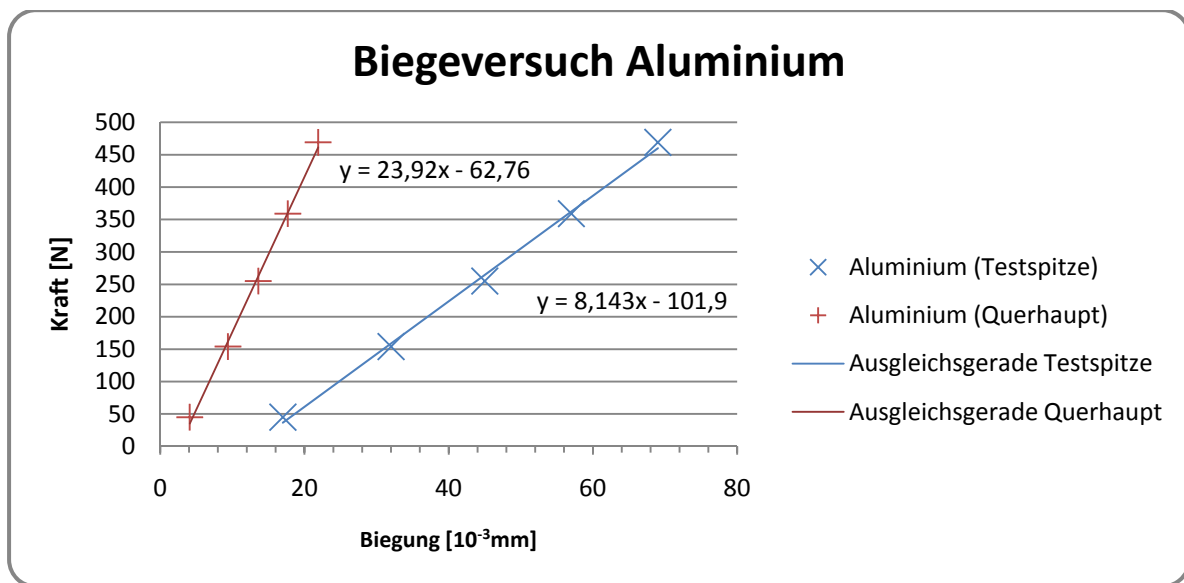
Position Querhaupt [ $10^{-3}$ mm]	0	4,1	9,4	13,6	17,7	21,9
Position Testspitze [mm]	0	0,017	0,032	0,045	0,057	0,069
Kraft [N]	0	45	154	255	359	469

**PVC:**

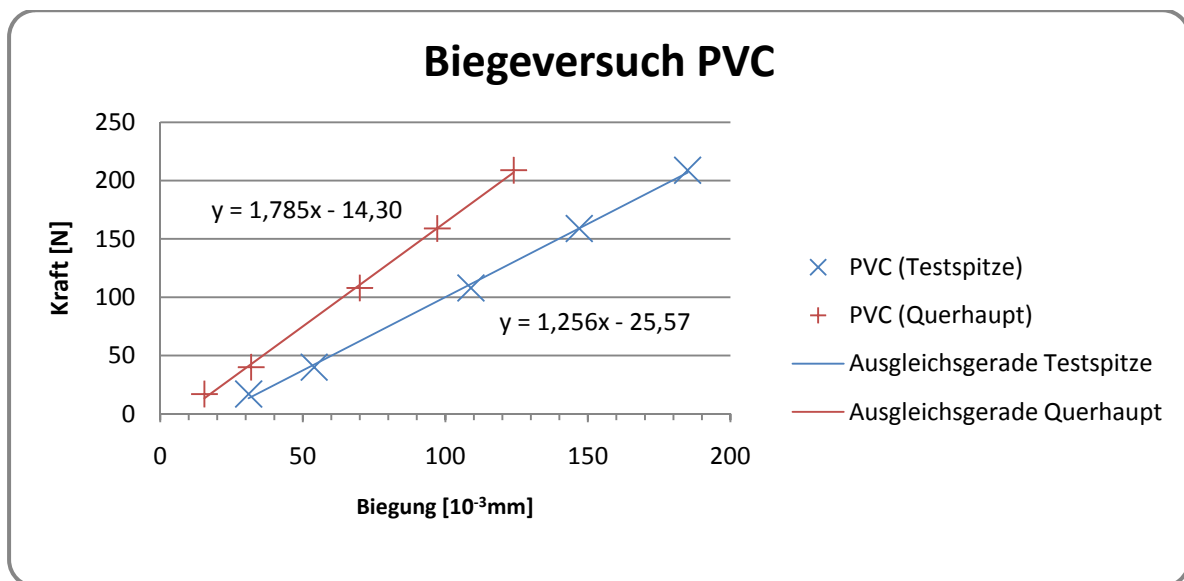
Position Querhaupt [ $10^{-3}$ mm]	0	15,5	31,9	70	97,2	124
Position Testspitze [mm]	0	0,031	0,054	0,109	0,147	0,185
Kraft [N]	0	17	40	108	159	209

Die gemessenen Werte wurden in ein Kraft-Weg Diagramm eingetragen und eine Ausgleichsgerade für die Position in Abhängigkeit der Druckkraft errechnet:

**Aluminium:**



**PVC:**

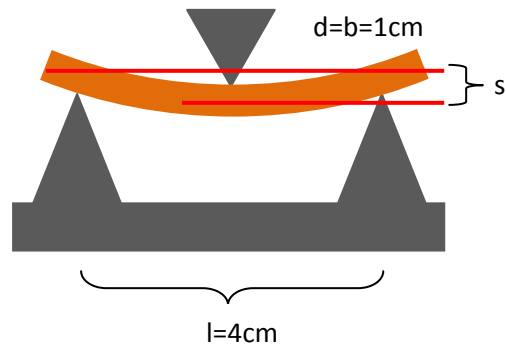


Auswertung: E-Modul und Ausbreitungsgeschwindigkeiten:

Für die weiteren Berechnungen werden jeweils die Positionsangaben des Querhauptes verwendet.

Aufgrund den Gesetzen der Balkenbiegung ergibt sich der folgende Zusammenhang zwischen der Biegunsauslenkung  $s$  und der Druckkraft  $F$ :

$$M = \frac{\Delta F}{\Delta s} = \frac{dF}{ds} = \frac{4 \cdot b \cdot d^3 \cdot E}{l^3}$$



Bzw. für das E-Modul :

$$E = \frac{M \cdot l^3}{4 \cdot b \cdot d^3}$$

Bzw. mit unseren Messwerten:

$$E_{Alu} = \frac{M \cdot l^3}{4 \cdot b \cdot d^3} = \frac{23,92 \frac{N}{10^{-3}mm} \cdot (4cm)^3}{4 cm^4} = \frac{23,92 \cdot 10^4 \cdot \frac{N}{cm} \cdot (4cm)^3}{4 cm^4} = 38,27 \frac{kN}{mm^2} = 38,27 GPa$$

$$E_{PVC} = \frac{M \cdot l^3}{4 \cdot b \cdot d^3} = \frac{1,785 \cdot 10^4 \cdot \frac{N}{cm} \cdot (4cm)^3}{4 cm^4} = 2,85 GPa$$

Dies ergibt als **Ausbreitungsgeschwindigkeit für Stab-Dehnungswellen:**

Dichten: Alu= 2,81g/cm<sup>3</sup>, PVC=1,48 g/cm<sup>3</sup>

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad v \left[ \frac{m}{s} \right] = \sqrt{\frac{E [GPa]}{\rho \left[ \frac{g}{cm^3} \right]}} \cdot 1000$$

Es ergibt mit dem gemessenen Wert für Alu:

$$v_{Alu_{Querhaupt}} = \sqrt{\frac{38,3 GPa}{2,7 \frac{g}{cm^3}}} = 3766 \frac{m}{s}$$

Einsetzen der Literaturwerte liefert:

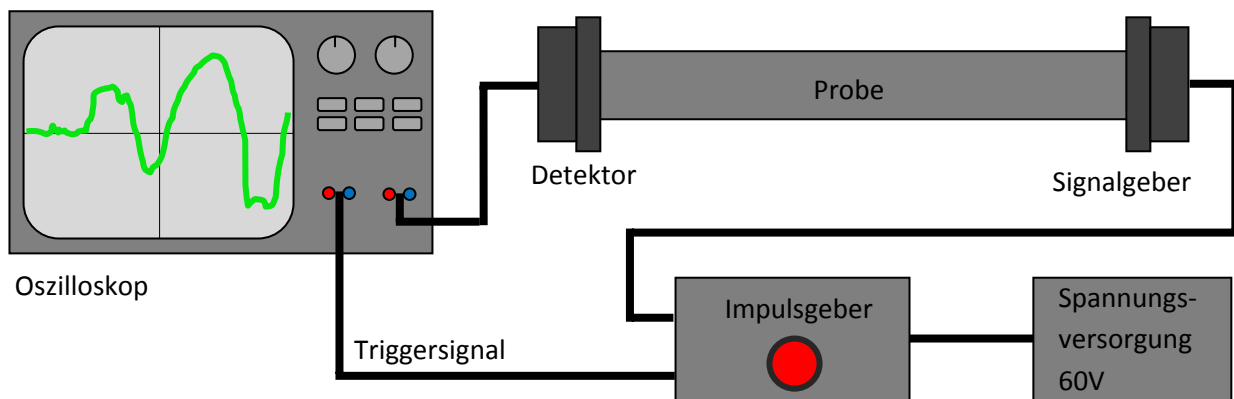
$$v_{Alu_{literatur}} = \sqrt{\frac{71 GPa}{2,7 \frac{g}{cm^3}}} = 5127 \frac{m}{s}$$

Und für PVC:

$$v_{PVC_{\text{Querhaupt}}} = \sqrt{\frac{2,85 \text{ GPa}}{1,48 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}}} = 1387 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

### 2b) Direkte Messung der Wellengeschwindigkeiten (mittels Oszilloskop)

Mittels einem Piezo-Impulsgeber wird ein kurzer Ultraschallimpuls durch die Proben geschickt, der am anderen Ende durch ein Piezo-Element detektiert wird und die Laufzeit am Digital-Oszilloskop gemessen. Um den nötigen Kontakt zwischen den Piezoelementen herzustellen wird Ultraschall-Kontaktgel verwendet.



Messwerte:

Laufzeit [ $\mu\text{s}$ ]				
Laufweg [cm]	20	2	50	11
Aluminium	48	13,6		30
PVC	118	16	276	

Da das Triggersignal im Oszilloskop nicht exakt genug ausgewertet wird, muss durch den Vergleich verschieden langer Proben die Verzögerung des Triggersignals herausgerechnet werden:

$$v_1 = \frac{s_1}{t_{\text{real}}} = \frac{s_1}{t_{\text{mess}_1} - t_{\text{trigger}}} = v_2 = \frac{s_2}{t_{\text{mess}_2} - t_{\text{trigger}}}$$

Daraus folgt:

$$t_{\text{trigger}} = \frac{s_2 \cdot t_1 - t_2 \cdot s_1}{s_2 - s_1}$$

$$t_{\text{Alu}} = \frac{2\text{cm} \cdot 48\mu\text{s} - 13,6\mu\text{s} \cdot 20\text{cm}}{-18\text{cm}} = 9,7\mu\text{s} \quad \text{und} \quad t_{\text{PVC}} = \frac{2\text{cm} \cdot 118\mu\text{s} - 16\mu\text{s} \cdot 20\text{cm}}{-18\text{cm}} = 4,6\mu\text{s}$$

Damit ergibt sich für die Ausbreitungsgeschwindigkeiten:

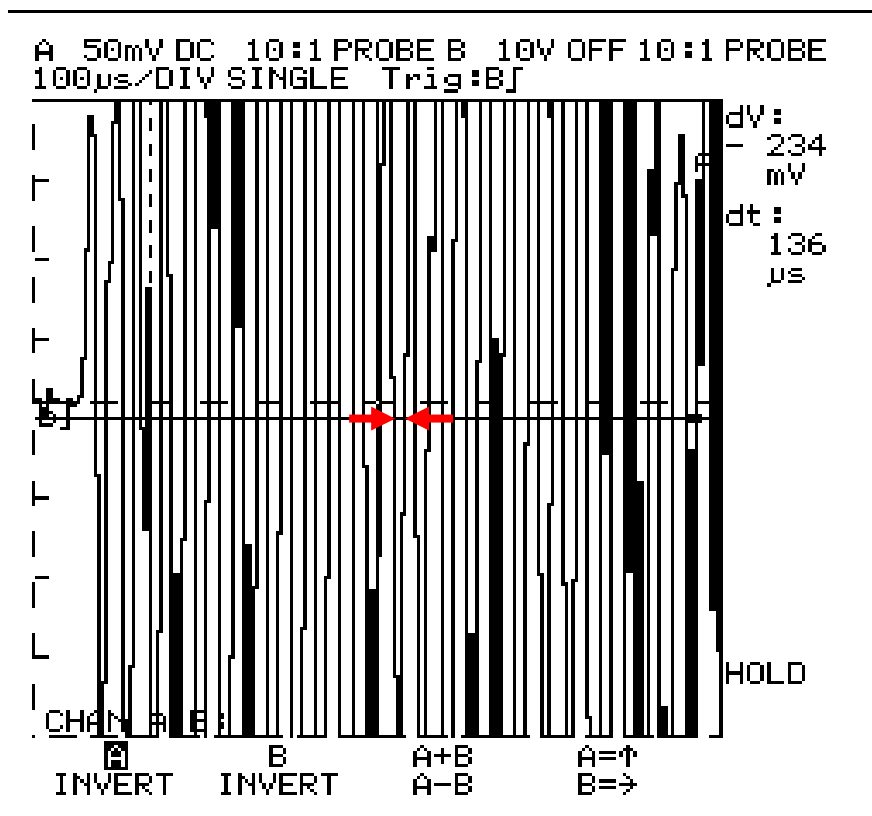
Geschwindigkeit [m/s]				
Laufweg [cm]	20	2	50	11
Aluminium	5221	5128		5418
PVC	1763	1754	1842	

Also für Alu  $v_{Alu} = 5200 \frac{m}{s}$  und PVC  $v_{PVC} = 1800 \frac{m}{s}$

Auswertung der Frequenzen:

Anhand der gespeicherten Oszilloskop Daten soll nun analysiert werden, welche Frequenzen die Proben durchlaufen:

**Alu:**



Die folgenden Nulldurchgangsabstände wurden aus dem Diagramm (25 Pixel= 100µs bzw. 4µs pro Pixel) bestimmt:

$$\Delta t = \frac{T}{2} \approx 3 \text{ Pixel} = 12 \mu s$$

Damit ergibt sich für die Frequenz:

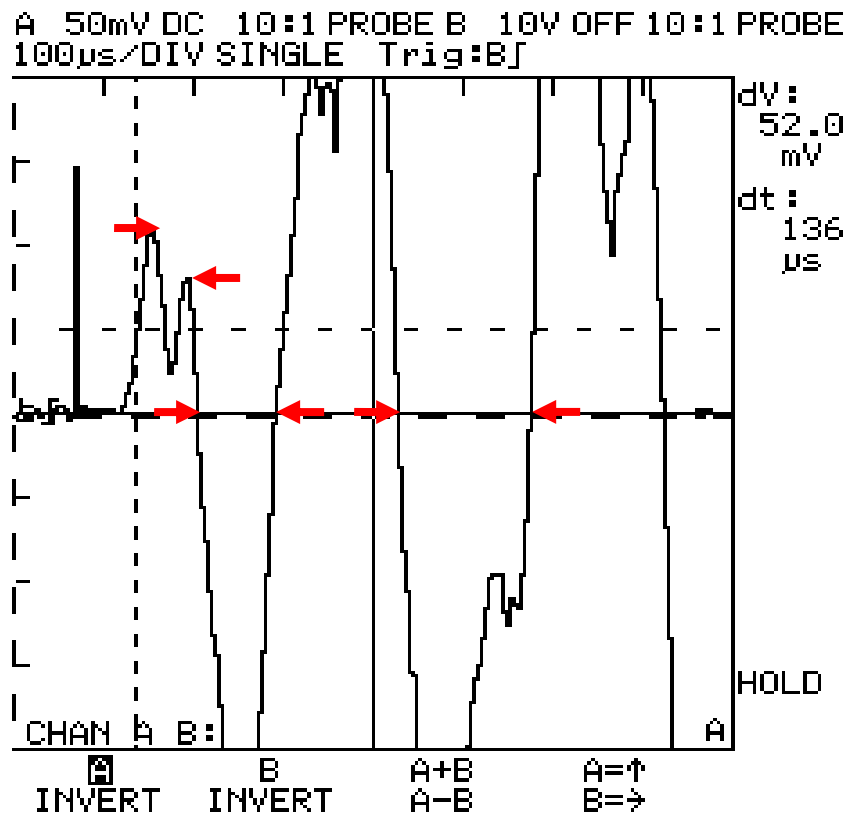
$$f_{Alu} = \frac{1}{T} = \frac{1}{24 \mu s} = 41666 \text{ Hz} = 41,6 \text{ kHz}$$

Daraus folgt für die Wellenlänge:

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{5200 \frac{m}{s}}{41,6 \text{ kHz}} = 0,12 \text{ m} = 12 \text{ cm}$$

Die Wellenlänge liegt also im Bereich der Ausdehnung der Probe.

PVC:



Die folgende Abstände wurden aus dem Diagramm (25 Pixel= 100μs bzw. 4μs pro Pixel) bestimmt:

$$\Delta t = \frac{T}{2} \approx 10, 20, 30 \text{ Pixel} = 40\mu\text{s}, 80\mu\text{s}, 120\mu\text{s}$$

Damit ergibt sich für die Frequenzen:

$$f_{PVC} = \frac{1}{T} = 12,5 \text{ kHz}; 6,2 \text{ kHz}; 4,2 \text{ kHz}$$

Daraus folgt für die Wellenlänge:

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{1800 \frac{m}{s}}{12,5 \text{ kHz}} = 14,4 \text{ cm}; 21,7 \text{ cm}; 42,9 \text{ cm}$$

Die Wellenlänge liegt also ebenfalls im Bereich der Ausdehnung der Probe. Die ersten Wellenzüge repräsentieren noch relativ gut die Frequenz des Signalgebers, während die späteren Werte die sich ausbildende Stehwelle ( $L = \frac{\lambda}{2}$ ) repräsentiert.

### 2c) Berechnung der p- und s-Wellengeschwindigkeit in Alu

Aus der Poisson'schen Zahl der Querkontraktion  $\nu$  für Alu (0,34) und dem Literaturwert für das E-Modul ( $E=70$  GPa) lässt sich die p- und s-Wellengeschwindigkeit wie folgt berechnen:

Das E-Modul ist gegeben durch:

$$E = 2\mu(1 + \nu) \quad \rightarrow \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

Für das Kompressionsmodul gilt:

$$\kappa = \frac{E}{3(1 - 2\nu)}$$

Somit ergibt sich für die Ausbreitungsgeschwindigkeiten in Aluminium:

**P-Welle:** ( $\nu = 0.34$ )

$$\begin{aligned} v_P &= \sqrt{\frac{\kappa + \frac{4}{3}\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{\frac{E}{3(1-2\nu)} + \frac{4}{6}\frac{E}{(1+\nu)}}{\rho}} = \sqrt{\frac{E \cdot \left(\frac{1}{3-6\nu} + \frac{4}{6+6\nu}\right)}{\rho}} = \sqrt{\frac{E \cdot 1,539}{\rho}} \\ &= \sqrt{\frac{70 \text{ GPa} \cdot 1,539}{2,7 \text{ g/cm}^3}} = 6316 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \text{bzw.} \quad \sqrt{\frac{38,3 \text{ GPa} \cdot 1,539}{2,7 \text{ g/cm}^3}} = 4672 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned}$$

**S-Welle:** ( $\nu = 0.34$ )

$$v_S = \sqrt{\frac{\kappa}{\rho}} = \sqrt{\frac{\frac{E}{3(1-2\nu)}}{\rho}} = \sqrt{\frac{E \cdot 1,041}{\rho}} = \sqrt{\frac{70 \text{ GPa} \cdot 1,041}{2,7 \text{ g/cm}^3}} = 5195 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Die Messwerte ( $v=5200$  m/s) aus Versuch 2b) kommen den Werten einer Stabdehnungswelle ( $v=5127$  m/s) am nächsten. Es handelt sich also eher um eine Stabdehnungswelle. Die Wellengeschwindigkeit einer P-Welle ( $v=4672$  m/s) deutlich anders.

Das ist plausibel, da hier die Wellenlängen im Bereich der Ausdehnung der Probe liegen und somit die Querdimensionen für die Fortpflanzung der Störung durchaus eine Rolle spielen. Eine P-Wellenausbreitung, bei der die Querspannungen wegfallen, kann hier also nicht angenommen werden.

Die Geschwindigkeit einer S-Welle ist zwar ebenfalls sehr ähnlich ( $v=5195$  m/s). Diese Wellenform liegt hier allerdings eher nicht vor, da die Auslenkung durch den Signalgeber nicht in Querrichtung erfolgt.